© DISCRETE MATHEMATICS 5 (1973) 145–158. North-Holland Publishing Company

SUR LE JOINT D'UNE FAMILLE DE GRAPHES

Jean-Loup JOLIVET

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Le Mans, France

Reçu le 13 Octobre 1972*

Résumé. Les graphes envisagés dans cet article sont non orientés, sans boucles ni arêtes multiples. On désigne par $X(G)$ et $E(G)$ les ensembles de sommets et d'arêtes d'un graphe G; ces ensembles seront toujours finis. Les notations usuelles sont celles de Berge [1].

Dans [5], Zykov introduit la notion de graphe joint de deux graphes donnés. Une propriété du joint de deux graphes dont l'un est réduit à un sommet est donnée dans [3]; c'est une étude plus générale et systématique que nous présentons ici.

1. Définitions, notations, propriétés élémentaires

Une famille de graphes $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ étant donnée, nous noterons $\alpha_i, \gamma_i, \omega_i, \theta_i$ le nombre de stabilité, le nombre chromatique, le cardinal d'une clique maximale, l'indice de partition en cliques du graphe G_i pour $i = 1, \ldots, p$. Ces lettres sans indices désigneront les invariants du joint de la famille, défini ci-après. Le nombre de sommets de G_i est noté n_i, on pose $\Sigma_{i=1}^{p} n_i = n$. Si x est un sommet de G_i, on note $d_i(x)$ son degré dans G_i et $d(x)$ son degré dans le joint.

Définition 1.1. Le *joint de la famille* $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est le graphe obtenu en ajoutant au graphe $\bigcup_{i=1}^{p} G_i$ (union disjointe) toutes les arêtes joignant deux sommets qui ne sont pas dans le même graphe G_i; on le note $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Propriété 1.2. *Si G_1, G_2, G_3 sont trois graphes, alors*

$$J(G_1, G_2) = J(G_2, G_1), \qquad J(G_1, G_2, G_3) = J(G_1, J(G_1, G_2)),$$
$$J(G_1, \emptyset) = G_1.$$

* Première version reçu le 29 juin 1972.

Propriété 1.3. *Soit x un sommet de G_i, alors* $d(x) = d_i(x) + \Sigma_{j \neq i} n_j$.

Propriété 1.4. *Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ comporte deux graphes non vides au moins, le diamètre de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est inférieur ou égal à 2.*

Propriété 1.5. *Si $(H_i)_{i=1,\ldots,p}$ sont des sous-graphes (resp. des graphes partiels et des sous-graphes partiels) des G_i, alors le joint $J(H_i)_{i=1,\ldots,p}$ est un sous-graphe (resp. graphe partiel, sous-graphe partiel) de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.*

Propriété 1.6. *Dans un graphe simple, les sommets de degrés impairs sont en nombre pair.*

Toutes ces propriétés sont très simples à montrer, nous ne le ferons pas ici. La propriété 1.6 est classique. Elles seront utilisées dans la suite sans référence explicite. Sauf mention contraire, les graphes envisagés seront non vides. Si $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ désigne une famille de graphes, il sera supposé que $p \geqslant 2$.

2. Etude des invariants usuels

Proposition 2.1. *Le joint des G_i vérifie* $\omega = \Sigma_{i=1}^{p} \omega_i$.

Démonstration. Soit K une clique de cardinal maximum dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ pour tout i, alors $G_i \cap K$ est une clique K_i du graphe G_i, et donc $|K_i| \leqslant \omega_i$. K a pour sommets l'union des ensembles de sommets des K_i ainsi construits, et donc $|K| \leqslant \Sigma_{i=1}^{p} \omega_i$.

Inversement, considérons le joint $J(H_i)_{i=1,\ldots,p}$ fourni à partir des sous-graphes H_i, cliques maximum dans chaque G_i. Il est clair que $J(H_i)_{i=1,\ldots,p}$ est une clique ayant $\Sigma_{i=1}^{p} \omega_i$ sommets; par ailleurs, la Propriété 1.5 montre que c'est un sous-graphe de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc $\omega \geqslant \Sigma_{i=1}^{p} \omega_i$, d'où la proposition.

Proposition 2.2. *Le joint des G_i vérifie* $\gamma = \Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i$.

Démonstration. Considérons une coloration en un nombre minimum de couleurs des sommets de $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$, elle induit sur chaque X_i une coloration en γ_i' couleurs, avec $\gamma_i' \geqslant \gamma_i$. Deux sommets n'appartenant pas au même X_i sont adjacents dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc de couleurs différentes, ainsi $\gamma = \Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i' \geqslant \Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i$.

Par ailleurs, si l'on réalise une coloration de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ en colorant chaque G_i avec γ_i couleurs que l'on n'utilise plus ensuite, il est clair que celle-ci comporte $\Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i$ couleurs exactement, et donc $\gamma \leqslant \Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i$, d'où le résultat.

Proposition 2.3. $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ *est γ-parfait si et seulement si chaque G_i est γ-parfait.*

Rappelons qu'un graphe G est γ-parfait (resp. α-parfait) si tout sous-graphe G' de G vérifie $\gamma(G') = \omega(G')$ (resp. $\alpha(G') = \theta(G')$).

Démonstration. Si chaque G_i est γ-parfait, on a $\gamma_i = \omega_i$ pour $i = 1, \ldots, p$, et donc $\omega = \Sigma_{i=1}^{p} \omega_i = \Sigma_{i=1}^{p} \gamma_i = \gamma$, ainsi $\omega = \gamma$.

Pour $n = 2$, le théorème est vérifié; supposons que pour $3, \ldots, n-1$ il le soit encore. Soit L un sous-graphe de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$. Si L est contenu dans l'un des G_i, il est bien sûr γ-parfait. Sinon soit L_i le sous-graphe $G_i \cap L$; on a donc $L = J(L_i)_{i=1,\ldots,p}$. Notre hypothèse de récurrence indique alors que L est γ-parfait. Ainsi $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est γ-parfait.

L'autre sens de l'implication est immédiat.

Proposition 2.4. *Le joint des G_i vérifie* $\alpha = \max \{\alpha_i : i = 1, \ldots, p\}$.

Démonstration. Soit S un ensemble stable de X; S ne peut contenir deux sommets appartenant à des G_i différents, et donc il existe un indice i tel que $S \subset X_i$ et donc $|S| \leqslant \alpha_i \leqslant \max \{\alpha_j : j = 1, \ldots, p\}$. Par ailleurs, si S' est un ensemble stable maximum dans le graphe G_i pour lequel α_i est maximum, on a $S' = \alpha_i$. Ainsi α vérifie bien $\alpha = \max \{\alpha_i : i = 1, \ldots, p\}$.

Proposition 2.5. *Le joint des G_i vérifie* $\theta = \max \{\theta_i : i = 1, \ldots, p\}$.

Démonstration. Soient $K_1, K_2, \ldots, K_\theta$ des cliques formant une partition de X, de cardinal minimum. Les traces $K_j \cap G_j$ de ces cliques sur les sous-graphes $(G_i)_{i=1,\dots,p}$ de $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$ sont des cliques telles que les familles $(K_j \cap G_i)_{j=1,\dots,\theta}$ forment des partitions en cliques des G_i ainsi, on a pour chaque i que $\theta \geqslant \theta_i$ et donc $\theta \geqslant \max\{\theta_i: i = 1,\dots,p\}$.

Inversement, montrons que $\theta \leqslant \max\{\theta_i: i = 1,\dots,p\}$. Supposons que les $(G_i)_{i=1,\dots,p}$ sont indexés de telle sorte que les θ_i soient décroissants, ce qui est possible à une permutation près. Soit $\{(K_i^j)_{j=1,\dots,\theta_i}\}_{i=1,\dots,p}$ des partitions minimum en cliques, des ensembles de sommets X_i, dans chaque G_i. Complétons chacune formellement en posant $K_i^j = \emptyset$ pour $j = \theta_i + 1,\dots,\theta_1$. Ainsi pour chaque j on considère les joints $J(K_i^j)_{i=1,\dots,p}$ pour $j = 1, 2,\dots,\theta_1$; d'après la Propriété 1.5 ce sont des sous-graphes de $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$. Il est clair que ce sont des cliques, et donc $\theta_1 \geqslant \theta$, d'où la proposition énoncée.

Proposition 2.6. *Le joint $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$ est α-parfait si et seulement si chaque G_i est α-parfait.*

La démonstration est identique à celle qui a été faite pour la Proposition 2.3.

3. Connectivité du joint d'une famille de graphes

Dans ce paragraphe, nous donnons les valeurs exactes des connectivité et arête-connectivité k et λ de $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$ en fonction de celles des G_i. Le nombre $\min\{d_i(x): x \in X_i\}$ est désigné par d_i, la connectivité de G_i par k_i. Rappelons que la connectivité (resp. arête-connectivité) de G est le nombre minimum de sommets (resp. arêtes) qu'il faut enlever à G pour le disconnecter.

Théorème 3.1. *Soit $(G_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille de graphes; alors la connectivité de $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$ est $k = n - \max\{(n_i - k_i): i = 1,\dots,p\}$.*

Démonstration. Soit S un ensemble de séparation de $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$, c'est-à-dire un ensemble de sommets dont la suppression disconnecte le graphe $J(G_i)_{i=1,\dots,p}$ et dont le cardinal soit minimum. Il existe un indice i unique tel que $X_i \not\subset S$; en effet, dans l'hypothèse inverse, le graphe engendré par $X \backslash S$ serait connexe. Notons $S_i = S \cap X_i$; S_i est donc un en-

semble de séparation de G_i et son cardinal est donc k_i; ainsi
$k = \min(n - n_i + k_i) = n - \max\{(n_i - k_i): i = 1,\dots,p\}$.

Lemme 3.2. *Soit G un graphe non orienté de diamètre* $\delta \leqslant 2$; *alors son arête connectivité* λ *est donnée par* $\lambda = \min\{d(x): x \in X\}$.

Démonstration. Ce lemme est un corollaire du Théorème 2 de [4] suivant: Si G est un graphe orienté de diamètre $\delta \leqslant 2$, soit $m_G^+(A, X\backslash A)$ le nombre d'arcs ayant leur origine dans A et leur extrémité dans $X\backslash A$. Si $d^\pm(x) = \min\{d^+(x), d^-(x)\}$, on a

$$\lambda'(G) = \min\{m_G^+(A, X\backslash A): \emptyset \subsetneq A \subset X\} = \min\{d^\pm(x): x \in X\}.$$

Notre graphe G non orienté étant donné, soit G^* le graphe orienté déduit en remplaçant chaque arête de G par deux arcs de sens opposés pour tout sommet x. On a

$$d_{G^*}^+(x) = d_{G^*}^-(x) = d_G^\pm(x) = d_G(x).$$

Le théorème donne donc

$$\min\{d_G(x): x \in X\} = \min\{m_{G^*}^+(A, X\backslash A): \emptyset \subsetneq A \subset X\}.$$

De par sa construction, G^* est tel que $m_{G^*}^+(A, X\backslash A)$ soit le nombre d'arêtes d'attachement de A dans G, que l'on note $m_G(A, X\backslash A)$; ainsi

$$\min\{d_G(x): x \in X\} = \min\{m_G(X, X\backslash A): \emptyset \subsetneq A \subset X\}.$$

Si $u_1, \dots, u_\lambda$ sont des arêtes de G dont la suppression disconnecte G, alors $u_1, \dots, u_{\lambda-1}$ ne disconnectent pas G et u_λ est un isthme de $G\backslash\{u_1, \dots, u_{\lambda-1}\}$. Ainsi $G\backslash\{u_1, \dots, u_\lambda\}$ a deux composantes connexes H_1 et H_2; les arêtes $\{u_1, \dots, u_\lambda\}$ ont une extrémité dans H_1 et l'autre dans H_2. Si nous appelons A l'ensemble des sommets de H_1, il vient $m_G(A, X\backslash A) = \lambda$, d'où le lemme.

Théorème 3.3. *Soit* $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ *une famille de graphes, le joint* $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ *a pour arête-connectivité* $\lambda = \min\{d_i + (n - n_i)\colon i = 1,\ldots,p\}$.

Démonstration. Le diamètre du joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $\delta \leqslant 2$. D'après le lemme et la Propriété 1.3, le théorème est immédiat.

4. Recouvrement des arêtes par des chaînes ou cycles simples, cycles eulériens

Nous étudions tout d'abord les recouvrements des arêtes d'un graphe par des chaînes simples ou des cycles simples, arêtes-disjointes. A partir des résultats obtenus, nous déduirons une condition nécessaire et suffisante pour que le joint d'une famille de graphes soit eulérien.

Un graphe $G = (X, E)$ étant donné, nous noterons $\pi'(G)$ le nombre minimum de cycles simples ou chaînes simples, arêtes-disjointes, qui partitionnent E; une telle partition sera appelée π'-partition. X^I et X^P désigneront respectivement l'ensemble des sommets de degrés impairs et l'ensemble des sommets de degrés pairs de G; leur cardinaux seront notés n^I et n^P.

Proposition 4.1. *Soit G un graphe ayant r composantes connexes; alors*:
(i) *si* $n^I = 0$, *on a* $\pi'(G) = r$;
(ii) *si* $n^I \neq 0$ et $r = 1$, *on a* $\pi'(G) = \frac{1}{2}n^I$;
(iii) *si* $n^I \neq 0$ et $r > 1$, *on a* $\max\{\frac{1}{2}n^I, r\} \leqslant \pi'(G) \leqslant \frac{1}{2}n^I + r$.

Démonstration. (i) Si $n^I = 0$, chaque composante connexe est un sous-graphe eulérien, et donc $\pi'(G) = r$; d'où l'égalité.

(ii) Si $n^I \neq 0$ et $r = 1$, considérons une famille F d'arêtes supplémentaires en nombre $\frac{1}{2}n^I$ ajoutées à G de telle sorte que chaque sommet de X^I soit extrémité d'une et d'une seule d'entre elles. Le nouveau graphe obtenu, soit G^*, est donc eulérien; soit C un cycle eulérien de G^*. Par suppression des arêtes de F (qui n'ont pas d'extrémités communes) on obtient une π'-partition de E en $\frac{1}{2}n^I$ chaînes ou cycles simples. Ainsi $\pi'(G) \leqslant \frac{1}{2}n^I$.

Inversement, si $C_1, \ldots, C_q$ est une π'-partition de E ayant un nombre q, minimal d'éléments, tout sommet $x \in X$ n'est extrémité que d'une chaîne au plus. Ainsi les extrémités de chaînes ont un degré impair, et donc $q \geqslant \frac{1}{2}n^I$; d'où la deuxième égalité.

(iii) Si $r > 1$ et $n^I \neq 0$, désignons par $H_1, \ldots, H_r$ les composantes connexes de G. L'égalité (ii) appliquée à chaque H_i nous donne

$$\pi'(H_i) = \max\{1, \tfrac{1}{2}n_i^I\}.$$

Il est clair que $\pi'(G) = \Sigma_{i=1}^r \pi'(H_i)$, et donc

$$\pi'(G) = \sum_{i=1}^{r} \max\{1, \tfrac{1}{2}n_i^I\} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \tfrac{1}{2}n_i^I + r = \tfrac{1}{2}n^I + r,$$

$$\max\{r, \tfrac{1}{2}n^I\} \leqslant \pi'(G),$$

d'où l'inégalité.

Proposition 4.2. *Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes indexés de telle sorte que pour un entier q, $0 \leqslant q \leqslant p$ on ait $i \leqslant q \Leftrightarrow n_i$ et $n = \Sigma_{i=1}^p n_i$ de même parité. Alors*

$$\pi'(J(G_i)_{i=1,\ldots,p}) = \max\{\tfrac{1}{2}(\Sigma_{i=1}^q n_i^I + \Sigma_{i=q+1}^r n_i^P), 1\}.$$

Démonstration. Le joint d'une famille de graphes étant connexe, $\pi'(G) = \max\{1, \frac{1}{2}n^I\}$. Le problème revient donc à calculer le nombre n^I.

Le degré d'un sommet x est $d(x) = d_i(x) + \Sigma_{j \neq i} n_j = d_i(x) + n - n_i$, et donc pour $i \leqslant q$, $n - n_i$ étant pair, $x \in X^I$ pour $d_i(x)$ impair, et pour $i > q$, $n - n_i$ étant impair, $x \in X^I$ pour $d_i(x)$ pair. Ainsi

$$X^I = (\cup_{i=1}^q X_i^I) \cup (\cup_{i=q+1}^p X_i^P);$$

ces ensembles sont bien sûr disjoints, et donc

$$|X^I| = \sum_{i=1}^{q} n_i^I + \sum_{i=q+1}^{p} n_i^P;$$

d'où la proposition.

Dans le théorème qui suit, nous appelerons *pré-eulérien* un graphe dont tous les degrés sont pairs. Ce théorème caractérise les familles de graphes ayant un joint eulérien.

Théorème 4.3. *Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes; alors le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée:*

(i) *Tous les G_i sont pré-eulériens et ont un nombre de sommets pairs.*

(ii) *Tous les G_i sont pré-eulériens et ont un nombre de sommets impairs; de plus, p est impair.*

(iii) *Il existe un entier q, $0 \leqslant q \leqslant p$ tel que q graphs G_i soient pré-eulériens et que les $p-q$ autres ne le soient pas; les premiers ont des nombres impairs de sommets, et q est impair; les seconds ont tous leurs degrés impairs.*

Démonstration. Supposons les G_i indexé comme indiqué dans l'énoncé de la Proposition 4.2; nous avons vu que $|X^I| = \Sigma_{i=1}^{p} n_i^I + \Sigma_{i=q+1}^{p} n_i^P$ pour cette indexation.

Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les conditions (i), n est pair et $q = p$ puisque chaque n_i est pair. Ainsi $\Sigma_{i=1}^{p} n_i^I = |X^I| = 0$, et donc $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien. Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les conditions (ii), n est impair et $q = p$. Donc $|X^I| = \Sigma_{i=1}^{p} n_i^I = 0$ et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est encore eulérien. Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les conditions (iii), n est impair. Donc $|X^I| = \Sigma_{i=1}^{q} n_i^I + \Sigma_{i=q+1}^{p} n_i^P = 0$, et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien.

Réciproquement, supposons que la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ a un joint eulérien. Pour un sommet x quelconque on a $d(x) = d_i(x) + (n - n_i)$; $d(x)$ étant pair, $d_i(x)$ et $(n - n_i)$ sont donc de même parité. Ainsi $d_i(x)$ est de parité constante pour $x \in X_i$, i fixé.

(1) *n est pair.* $n_1, \ldots, n_q$ sont pairs et $n_{q+1}, \ldots, n_p$ impairs, donc les $G_{q+1}, \ldots, G_p$ sont pré-eulériens. Si $q = p$, tous les n_i sont pairs. Pour un sommet $x \in X_i$ quelconque, $d(x) = d_i(x) + (n - n_i)$; $d(x)$ et $(n - n_i)$ sont pairs, donc $d_i(x)$ est pair, et G_i est pré-eulérien. La famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses (i). On a $q \neq 0$; en effet, pour $q = 0$ les G_i seraient tous pré-eulériens avec les n_i impairs, ce qui donnerait des degrés impairs pour tous les sommets de G. Le cas $0 < q < p$ est impossible; en effet, dans ce cas pour un indice r quelconque tel que $q < r \leqslant p$ et un sommet quelconque x de X_r nous aurions $d(x) = d_r(x) + (n - n_r)$, donc impair.

(2) *n est impair.* $n_1, n_2, \ldots, n_q$ sont impairs et $n_{q+1}, \ldots, n_p$ sont pairs, et donc $G_1, G_2, \ldots, G_q$ sont pré-eulériens. Si $q = p$, tous les G_i sont pré-eulériens. p est impair puisque $\Sigma_{i=1}^{p} n_i$ est impair et que chaque n_i est impair. La famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses (ii). On a $q \neq 0$, puisque dans le cas contraire tous les n_i seraient pairs et donc n également. Si $0 < q < p$, supposons qu'il existe un indice r tel que G_r soit pré-eulérien et $q < r \leqslant p$. Pour un sommet $x \in X_r$, $d(x) = d_r(x) + (n - n_r)$, donc $d(x)$ serait impair.

Ainsi tous les G_i, $i \geqslant q + 1$, ont des sommets de degrés impairs seulement. q est impair; en effet, pour un sommet $x \in X_p$,

$$d(x) = d_p(x) + (n - n_p) = d_p(x) + \sum_{i=1}^{q} n_i + \sum_{i=q+1}^{p-1} n_i,$$

donc $d_p(x)$ et $\Sigma_{i=1}^{q} n_i$ sont de même parité; n_i étant pair pour $i \leqslant q$, q est donc impair. La famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses (iii).

Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Partition de X en chaînes, problèmes hamiltoniens

Un graphe $G = (X, E)$ étant donné, nous notons $\pi(G)$ le cardinal minimum d'une partition de X en chaînes élémentaires; l'introduction de cet invariant nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le joint de deux graphes soit hamiltonien. Nous étudierons ensuite certaines conditions caractérisant des familles de graphes ayant un joint hamiltonien ou hamiltonien connecté.

Théorème 5.1. *Soient G_1 et G_2 deux graphes tels que $\pi(G_1) \geqslant \pi(G_2)$; alors:*

(i) *$J(G_1, G_2)$ est hamiltonien si et seulement si $\pi(G_1) \leqslant n_2$.*

(ii) *$J(G_1, G_2)$ possède une chaîne hamiltonienne si et seulement si $\pi(G_1) \leqslant n_2 + 1$.*

(iii) *Si $\pi(G_1) > n_2 + 1$, $\pi(J(G_1, G_2)) = \pi(G_1) - n_2$.*

Démonstration. (i) Si $J(G_1, G_2)$ est hamiltonien, soit C un de ses cycles hamiltoniens, il induit sur X_1 une partition en chaînes élémentaires

$C_1, \dots, C_q$ et donc $q \geqslant \pi(G_1)$. Sur C, les extrémités des chaînes C_i sont adjacentes à des sommets de X_2, et donc $q \leqslant n_2$, d'où $n_2 \leqslant \pi(G_1)$.

Inversement, si l'on a $n_2 \geqslant \pi(G_1)$ il existe une partition de X_2 en $\pi(G_1)$ chaînes élémentaires: Soit $C_1, C_2, \dots, C_{\pi(G_2)}$ une partition de cardinal minimum. Enlevons $\pi(G_1) - \pi(G_2)$ arêtes à cet ensemble de chaînes (ce qui est possible puisque $n_2 \geqslant \pi(G_1)$), la nouvelle partition obtenue a bien $\pi(G_1)$ éléments, $C'_1, C'_2, \dots, C'_{\pi(G_1)}$. On construit un cycle hamiltonien de $J(G_1, G_2)$ en prenant $C_1, C'_2, C_2, \dots, C'_{\pi(G_1)}$, ce qui est possible puisque toutes les arêtes de liaison sont dans le joint.

(ii) Si $\pi(G_1) \leqslant n_2 + 1$, on construit une chaîne hamiltonienne de $J(G_1, G_2)$ par le procédé employé précédemment.

Si $J(G_1, G_2)$ possède une chaîne hamiltonienne C, elle induit sur X_1 des chaînes $C_1, \dots, C_q$ avec $q \geqslant \pi(G_1)$, par ailleurs sur C ces chaînes ont $q - 1$ extrémités adjacentes à des sommets de X_2, et ainsi $\pi(G_1) \leqslant q \leqslant n_2 - 1$.

(iii) Supposons maintenant que $\pi(G_1) > n_2 + 1$. D'après les questions précédentes, $\pi(J(G_1, G_2)) \geqslant 2$.

Considérons une partition de X_1 en chaînes, ayant un nombre $\pi(G_1)$ d'éléments $C_1, C_2, \dots, C_{\pi(G_1)}$. Si nous notons $\{x_i\}_{i=1,\dots,n_2}$ les sommets de G_2, nous pouvons construire une chaîne $C = C_1, x_1, C_2, x_2, \dots, x_{n_2}, C_{n_2+1}$ contenant $n_2 + 1$ chaînes de G_1 et tous les sommets de G_2. $\{C, C_{n_2+2}, \dots, C_{\pi(G_1)}\}$ forme une partition de $X_1 \cup X_2$ en $\pi(G_1) - n_2$ chaînes élémentaires de $\pi(G_1, G_2)$, et donc $\pi(J(G_1, G_2)) \leqslant \pi(G_1) - n_2$.

Le problème est maintenant de montrer que toute partition en chaînes de $X_1 \cup X_2$ a au moins $\pi(G_1) - n_2$ éléments. Pour cela, soit $C_1, \dots, C_q$ une partition P de $X_1 \cup X_2$ dans $J(G_1, G_2)$, avec q minimum. Les sommets qui sont extrémités des chaînes C_i sont tous dans X_1 ou tous dans X_2, car dans le cas contraire, en ajoutant une arête liant deux extrémités de chaînes, on pourrait diminuer le cardinal de la partition.

Toutes les extrémités de chaînes sont dans X_1 : Supposons qu'elles soient toutes dans X_2. Chaque chaîne C_i induit sur X_1 et X_2 des chaînes de G_1 et G_2, $C_i = C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{k_i}$, où C_i^{2h+1} est une chaîne de G_2 et C_i^{2h} une chaîne de G_1 (on convient d'appeler chaîne un sommet, la longueur de la chaîne étant 0). Ainsi les nombres $\{k_i\}_{i=1,\dots,q}$ sont impairs.

Pour la partition $P = C_1, C_2, \dots, C_q$, on a ainsi $\Sigma_{i=1}^q \frac{1}{2}(k_i + 1)$ chaînes partitionnant X_2 et $\Sigma_{i=1}^q \frac{1}{2}(k_i - 1)$ chaînes élémentaires partitionnant X_1. Donc

$$\sum_{i=1}^{q} \tfrac{1}{2}(k_i + 1) \leqslant n_2, \qquad \sum_{i=1}^{q} \tfrac{1}{2}(k_i - 1) \geqslant \pi(G_1),$$

$$\sum_{i=1}^{q} k_i \leqslant 2n_2 - q, \qquad \sum_{i=1}^{q} k_i \geqslant 2\pi(G_1) + q,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\pi(G_1) > n_2 + 1$.

Si deux chaînes C_i et C_j de la partition P contiennent des sommets de X_2, soit $C_i = C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{k_i-1}, C_i^{k_i}$ et x le dernier sommet de $C_i^{k_i-1}$. Considérons les deux chaînes

$$C_i' = C_i^{k_i}, \qquad C_j' = C_i^1, \ldots, C_i^{k_i-1}, C_j^1, \ldots, C_j^{k_j}.$$

C_j' est bien une chaîne de $J(G_1, G_2)$ puisque $C_i^{k_i-1}$ et C_j^1 sont reliés par une arête (x, y), si y est le premier sommet de C_j^1.

Il est clair que par itération de ce procédé, on déduit de la partition P une partition P' telle que tous les sommets de X_2 soient sur la même chaîne, C_1 par exemple, P' ayant le même nombre d'éléments que P. Pour les raisons exposées dans le cas (ii), P a au moins $\pi(G_1) - n_2$ éléments, et donc $\pi(J(G_1, G_2)) \geqslant \pi(G_1) - n_2$.

Proposition 5.2. *Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes telle qu'il existe un entier r vérifiant $\pi(G_i) \leqslant r \leqslant n_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$; alors $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.*

Démonstration. Nous avons montré, lors de la démonstration du point (i) du Théorème 5.1, que pour tout entier r vérifiant $\pi(G_i) \leqslant r \leqslant n_i$ il existait une partition de X_i en r chaînes élémentaires. Soient $\{C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^r\}_{i=1,\ldots,p}$ des partitions en chaînes de chaque ensemble X_i. Nous construirons aisément un cycle hamiltonien C de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

$$C = (C_1^1, C_2^1, \ldots, C_p^1, C_1^2, \ldots, C_p^2, \ldots, C_1^r, C_2^r, \ldots, C_p^r),$$

toutes les arêtes reliant des extrémités de chaînes C_i^k et C_{i+1}^k ou bien C_p^k, C_i^{k+1} étant dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Le théorème suivant donne deux conditions suffisantes pour qu'une famille de graphes ait un joint hamiltonien.

Théorème 5.3. *Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes telle que $n_1 \geqslant n_i$ pour $i = 1,\ldots,p$; alors si*

(i) $n_1 \leqslant \frac{1}{2}n$, *ou bien*

(ii) $n_1 > \frac{1}{2}n$ *et* $|H_1^k| < k + n - n_1$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}(2n_1 - n - 1)$, où $H_1^k = \{x \in X_1 : d_1(x) \leqslant k\}$,

le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Démonstration. (i) Si $n_1 < \frac{1}{2}n$, on a $n_i \leqslant \frac{1}{2}n$ pour $i = 1,\ldots,p$. Donc pour tout $x \in X$, $d(x) \geqslant \frac{1}{2}n$; $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est donc hamiltonien.

(ii) Si $n_1 > \frac{1}{2}n$, tout sommet x n'appartenant pas à X_1 a un degré $d(x) \geqslant |X_1| = n_1 > \frac{1}{2}n$. Si nous notons H^k l'ensemble $\{x \in X : d(x) \leqslant k\}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$, nous aurons donc $H^k = H_1^{k-n+n_1}$ puisqu'un sommet de X_1 a pour degrés $d(x) = d_1(x) + (n - n_1)$ dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$. Ainsi $|H^k| < k - n + n_1 + (n - n_1)$; soit $|H^k| < k$ pour $1 \leqslant k - n + n_1 \leqslant \frac{1}{2}(2n_1 - n - 1)$, c'est-à-dire pour $n - n_1 + 1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$. Par ailleurs, $H^k = \emptyset$ pour $1 \leqslant k \leqslant n - n_1$, et donc les hypothèses du théorème de Posa [4] sont réalisées et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Théorème 5.4. *Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes hamiltoniens, le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $(n-2)$-hamiltonien-connecté.*

Rappelons que dans [2] un graphe G est dit *q-hamiltonien-connecté* si pour tout couple x, y de sommets il existe des chaînes élémentaires de G ayant pour longueur $n-1, n-2, \ldots, n-q$ et pour extrémités x et y.

Démonstration. Il s'agit donc de démontrer que pour deux sommets x et y quelconques il existe une chaîne de longueur k pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

(1) x et y ne sont pas dans le même graphe G_i; par commodité nous pouvons considérer $x \in X_1$, $y \in X_p$. Désignons par $H_j = (u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{n_j}^j, u_1^j)$, $j = 1,\ldots,p$, des cycles hamiltoniens de chaque graphe G_j en convenant de prendre $x = u_1^1$ et $y = u_{n_p}^p$. Soit C la chaîne suivante:

$$C = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{l_1}^1, u_1^2, u_2^2, \ldots, u_{l_2}^2, \ldots, u_{l_{p-1}}^{p-1}, u_{l_p}^p, \ldots, u_{n_p}^p)$$

où pour chaque j on a $1 \leqslant l_j \leqslant n_j$. Pour toutes les valeurs possibles des entiers l_j il est clair que la longueur de C varie de $n-1$ à p. Considérons ensuite $C' = (u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{p-j}, u_{n_p}^p)$; c'est une chaîne de longueur $p - j$ avec $1 \leqslant j \leqslant p - 1$. Nous avons donc construit des chaînes élémentaires ayant pour extrémités x et y et de longueurs $1, 2, \ldots, (n - 1)$.

(2) x et y appartiennent au même graphe G_i; G_1 par commodité. Considérons les cycles H_j précédents avec $u_1^1 = x$ et $u_k^1 = y$. Soit

$$C = (u_2^1, u_2^1, \ldots, u_{l_1}^1, u_1^2, \ldots, u_{l_2}^2, u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{l_k}^k, \ldots, u_1^p, \ldots, u_{l_p}^p, u_j^1, \ldots, u_k^1),$$

avec $1 \leqslant l_1 \leqslant k - 1, j \leqslant k \leqslant n_1$ et $1 \leqslant l_k \leqslant n_h$ pour $h = 2, \ldots, p$. Les chaînes ainsi obtenues ont pour longueur $(n - 1), (n - 2), \ldots, p$. En construisant comme précédemment les chaînes $(u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^j, u_k^1)$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$, on obtient bien toutes les longueurs de p à 2, d'où le résultat.

6. Condition pour qu'un graphe G soit le joint d'une famille de graphes

Nous avons jusqu'ici étudié les propriétés de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ connaissant celles des G_i. Inversement, un graphe G étant donné, est-il le joint d'une famille de sous-graphes? Quelles relations existe-t-il entre deux familles ayant des joints identiques, à un isomorphisme près?

Théorème 6.1. *Soit $G = (X, E)$ un graphe ayant n sommets et p, $2 \leqslant p \leqslant n$, un entier. G est le joint d'une famille de p graphes G_i non vides si et seulement si le graphe complémentaire $\overline{G}$ a un nombre $q \geqslant p$ de composantes connexes.*

Démonstration. Soient $Y_1, \ldots, Y_q$ les sous-ensembles de X déterminés par les composantes connexes de $\overline{G}$.

Si $q \geqslant p$, considérons les sous-graphes $(G_i)_{i=1,\ldots,q}$ engendrés dans G par les $(Y_i)_{i=1,\ldots,q}$. Soient x et y deux sommets de X, respectivement dans Y_i et Y_j, $i \neq j$. L'arête (x, y) n'est pas dans $\overline{G}$ et donc ces sommets sont adjacents dans G. G est donc le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,q}$ en posant $Y' = \bigcup_{i=1}^{q-p+1} Y_i$. Si G' est le sous-graphe engendré dans G par Y', alors $G' = J(G_i)_{i=1,\ldots,q-p+1}$ et $J(G', (G_i)_{(q-p+2)\ldots q)}) = G$.

Inversement, si G est joint d'une famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, soient $X_1, \ldots, X_p$ les ensembles de sommets des G_i. Deux sommets x et y appartenant à des sous-ensembles X_i et X_j différents appartiennent à des composantes connexes de $\overline{G}$ différentes puisque toute chaîne les reliant dans $\overline{G}$ devrait comporter une arête joignant deux sommets appartenant à des X_i différents. Chaque X_i est donc réunion de sous-ensembles $\{Y_i\}_{1,\dots,q}$, et donc $q \geqslant p$.

Théorème 6.2. *Deux familles $(G_i)_{i=1,\dots,p}$ et $(G_i')_{i=1,\dots,p'}$ déterminent le même joint, à un isomorphisme près, si et seulement si:*

(i) $n = n'$,

(ii) *Il existe $\varphi: X \to X'$ bijective et deux partitions $(Y_j)_{j=1,\dots,q}$, $(Y_j')_{j=1,\dots,q}$ de X et X' telles que $\varphi(Y_j) = Y_j'$, les sous-graphes H_i et H_i' engendrés par les Y_j et Y_j' soient des sous-graphes des G_i et G_i', et que chaque G_i (resp. G_i') soit le joint de ses sous-graphes H_i (resp. H_i').*

Evidemment, d'après la construction faite lors de la démonstration du Théorème 6.1, les $\{Y_i\}_{1,\dots,q}$ sont les sous-ensembles de X déterminés par les composantes connexes de $\overline{J}$.

Références

[1] C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).

[2] G. Chartrand, S.F. Kapoor et H.V. Kronk, A generalisation of hamilton connected graphs, J. Math. Pures Appl. 48 (1969) 109–116.

[3] J.L. Jolivet, Sur la connexité des graphes orientés, C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972) 148–150.

[4] L. Posa, A theorem concerning hamilton-lines, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl. 8 (1963) 355–361.

[5] A.A. Zykov, On some properties of linear complexes, Math. Sb. 24 (1949) 163–188.